速い変数による平均化

Theorem 1. $T > 0$ に対して, $f, g \in C(\mathbb{R}), g(x+T) = g(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ をみたすとする. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\,dx = \left(\int_0^T f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\right)\ (n \in \mathbb{N})$$

(ii)

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_0^T f(x)g(tx)\,dx = \left(\int_0^T f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\right)\ (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. (速い変数による平均化)

Proof. (ii) については, $t \to \infty$ (または $t \to \infty$) において定理を示せばよい ($t \to -\infty$ のときは $g(x)$ の代わりに $g(-x)$ を改めて g とおけばよい). また, 変数変換をすることにより $T = 1$ のときを示せばよい.

(i) 積分区間を n 等分すると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)g(nx)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(x+\frac{k}{n}\right)g(nx+k)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}} f\left(x+\frac{k}{n}\right)g(nx)\,dx \ (\because g \text{ の周期性}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{1} \frac{1}{n}f\left(\frac{y+k}{n}\right)g(y)\,dy \ (\because y = nx) \\
&= \int_0^1 \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{y+k}{n}\right)\right\}g(y)\,dy
\end{aligned}$$

となる. ここで n が十分大きいとき, $\dfrac{k}{n} \leq \dfrac{y+k}{n} < \dfrac{k+1}{n}$ $(k = 0, \dots, n-1)$ が成り立ち, $f \in C(\mathbb{R})$ であることより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{y+k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

が成り立つ. この収束は一様収束であるため, 極限と積分記号の順序を交換することができき

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{y+k}{n}\right)\right\}g(y)\,dy \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{y+k}{n}\right)\right\}g(y)\,dy \\
&= \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる.

(ii) (i) の証明と同様に, $t \to \infty, T = 1$ のときを示す.

$n \leq t < n+1$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ 用いると

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f(x)g(tx)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{t}}^{\frac{k}{t}} f\left(\frac{k}{t}\right) g(tx)\,dx \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{t}}^{\frac{k}{t}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{t}\right)\right) g(tx)\,dx + \int_{\frac{n}{t}}^{1} f(x)g(tx)\,dx \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{t} \left(\max_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \right) \left(\max_{0\leq x,y\leq 1, |x-y|\leq \frac{1}{t}} |f(x)-f(y)| \right) \right\} + \frac{1}{t}\left(1 - \frac{n}{t}\right) \left(\max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \right) \left(\max_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \right) \\
&\leq \left(\max_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \right) \left(\max_{0\leq x,y\leq 1, |x-y|\leq \frac{1}{t}} |f(x)-f(y)| \right) + \frac{1}{t} \left(\max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \right) \left(\max_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \right)
\end{aligned}$$

と変形することができる. ここで f は $[0,1]$ 上で一様連続であるから

$$\max_{0\leq x,y\leq 1, |x-y|\leq \frac{1}{t}} |f(x)-f(y)| \to 0 \ (t \to \infty)$$

となり

$$\lim_{t\to\infty} \left| \int_0^1 f(x)g(tx)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{t}}^{\frac{k}{t}} f\left(\frac{k}{t}\right) g(tx)\,dx \right| = 0$$

が成り立つことがわかる.

また

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{t}}^{\frac{k}{t}} f\left(\frac{k}{t}\right) g(tx)\,dx &= \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{t}\right) \right) \int_0^1 g(x)\,dx \\
&= \left(\int_0^1 f(x)\,dx \right) \left(\int_0^1 g(x)\,dx \right)
\end{aligned}$$

となるから

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 f(x)g(tx)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx \right) \left(\int_0^1 g(x)\,dx \right)$$

が成り立つことがわかる.

以上より, 定理が示された. ■

g の変数 nx (または tx) は f の変数 x に比べて速く発散する. すると, n または t の絶対値が大きくなるにつれて $g(nx)$ (または $g(tx)$) は $f(x)$ の変化に比べて, ものすごい勢いで振動していくはずである. 実際に, $f(x) = e^{-x}, g(x) = \sin 2\pi x$ として $y = f(x)g(nx)$ $(0 \leq x \leq 4)$ のグラフを図 1 に載せておく.

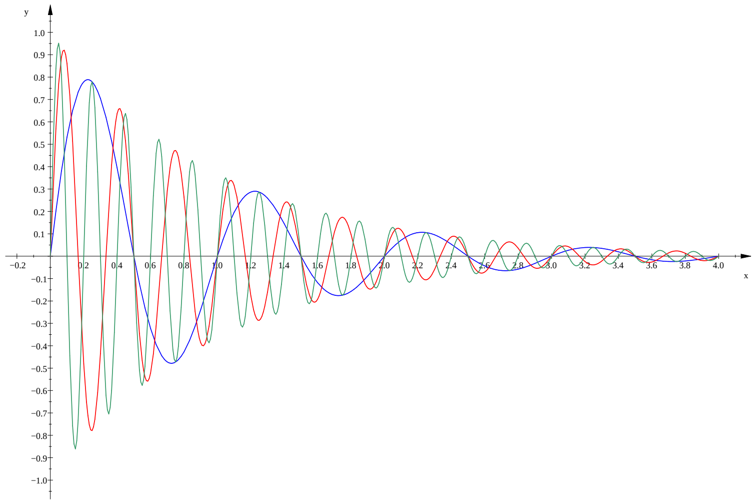

図 1: $y = e^{-x}\sin 2\pi nx$ $(0 \leq x \leq 4)$, 青：$n = 1$, 赤：$n = 3$. 緑：$n = 5$

ある関数と, ものすごい勢いで振動する (周期) 関数の積の関数を積分するときは, 周期関数の「平均値」

$$\overline{g} = \frac{1}{T}\int_0^T g(y)\,dy$$

を用いて, n (または t) の絶対値が十分大きいとき, Theorem 1 から

$$\int_0^T f(x)g(nx)\,dx \ \left(\text{または} \int_0^T f(x)g(tx)\,dx \right) \simeq \int_0^T \overline{g} f(x)\,dx = \overline{g}\int_0^T f(x)\,dx$$

のように振動する関数を含まない積分で近似することができるというがわかる. この事実から, この積分等式が「速い変数による平均化」と呼ばれている.

これから, f, g の仮定について考察する. 以下積分を Lebesgue 測度による積分として話を進めることにする. そこで登場するのが, 基本的な関数空間の $L^1(\mathbb{R})$ である. この空間は

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty \right\}$$

で定義される.[1]

実は, $C_0^\infty(\mathbb{R})$ は $L^1(\mathbb{R})$ の部分空間として稠密であることが知られている.

次は f の仮定について考察をする. ここでは, f が $L^1(\mathbb{R})$ に属していれば主張が成り立つことを示す. ここでは, Theorem 1 の証明同様 $T = 1, n \to \infty$ のときを示す. $t \to \infty$ のときも同様である.

$f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C(\mathbb{R}), g(x+1) = g(x)$ とすると $C_0^\infty(\mathbb{R})$ は $L^1(\mathbb{R})$ の中で稠密であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|f - h\|_1 < \varepsilon$ をみたす $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が存在する. このとき Theorem 1 より

$$\left| \int_0^1 h(x)g(nx)\,dx - \left(\int_0^1 h(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \right| < \varepsilon \ (\forall n \geq N)$$

[1] 厳密には,「零集合を除いて一致する関数を同一視する」という同値関係で割った商空間で定義される.

をみたす $N \in \mathbb{N}$ が存在する. よって $n \geq N$ のとき, 三角不等式から

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\right| \\
&\qquad \leq \left|\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx - \int_0^1 h(x)g(nx)\,dx\right| \\
&\qquad\qquad + \left|\int_0^1 h(x)g(nx)\,dx - \left(\int_0^1 h(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\right| \\
&\qquad\qquad\qquad + \left|\left(\int_0^1 h(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\right| \\
&\qquad \leq \int_0^1 |f(x)-h(x)||g(nx)|\,dx + \varepsilon + \left(\int_0^1 |h(x)-f(x)|\,dx\right)\left(\int_0^1 |g(x)|\,dx\right) \\
&\qquad < \|f-h\|_1 \max_{0\leq x\leq 1}|g| + \varepsilon + \|f-h\|_1 \max_{0\leq x\leq 1}|g| \\
&\qquad < \left(2\max_{0\leq x\leq 1}|g| + 1\right)\varepsilon
\end{aligned}
$$

であることがわかり, これで f の仮定を $L^1(\mathbb{R})$ に緩めてもよいことが示された.

以上で述べた結果を定理としてまとめておく.

Theorem 2. $T > 0$ に対して, $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C(\mathbb{R}), g(x+T) = g(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ をみたすとする. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\,dx = \left(\int_0^T f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(ii)

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_0^T f(x)g(tx)\,dx = \left(\int_0^T f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,dx\right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

このようにして仮定を緩くすることができた. われわれが通常扱う関数は連続などの比較的「よい性質」をもった関数であるから, 実用上は Theorem 2 の仮定で十分である.

では, この定理が具体的にどこで使われているかを紹介する. 有名な例としては Fourier 級数における Riemann-Lebesgue の定理があげられる.

Theorem 3. $f \in L^1(\mathbb{R})$ とし $n \in \mathbb{Z}$ に対して Fourier 余弦係数 $\{a_n\}$, Fourier 正弦係数 $\{b_n\}$, 複素 Fourier 係数 $\{c_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$$

が成り立つ. (Riemann-Lebesgue の定理)

Proof. 関数 C, S, E を

$$C(x) = \frac{1}{\pi}\cos x, S(x) = \frac{1}{\pi}\sin x, E(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-ix} \ (x \in \mathbb{R})$$

とすると $C, S, E \in C(\mathbb{R}), C(x+2\pi) = C(x), S(x+2\pi) = S(x), E(x+2\pi) = E(x) \ (x \in \mathbb{R})$ である. また

$$\int_0^{2\pi} C(x)\,dx = \int_0^{2\pi} S(x)\,dx = \int_0^{2\pi} E(x)\,dx = 0$$

であるから, あとは Theorem 2 を適用すればよい. ■